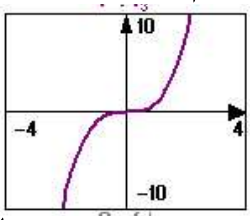
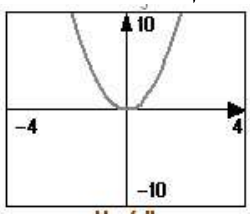
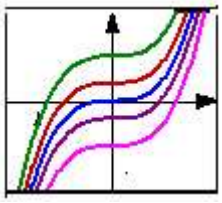
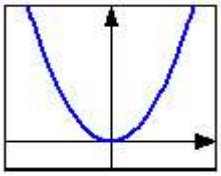
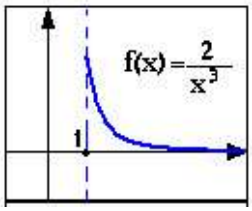
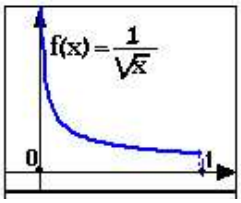
אינטגרל ופונקציה קדומה

מושגים בסיסים

הגדרות ותיאורים	צורה גרפית, הערות	דוגמאות
כל פונקציה $F(x)$ המקיימת $F'(x)=f(x)$ בתחום A נקראת **פונקציה קדומה של פונקציה f(x) בתחום A.** הפעולה של מציאת פונקציה קדומה נקראת **אינטגרציה.** **שימו לב!** יתכן כי לפונקציה מסוימת בתחומים שונים יש כמה פונקציות קדומות שונות	הפונקציה הבאה  היא פונקציה קדומה של הפונקציה:  	1. הפונקציה $F(x)=x^3$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)=3x^2$ כי $(x^3)'=3x^2$. 2. הפונקציה $F_1(x)=\frac{x^2}{2}$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)=\lvert x\rvert$ בתחום $x\geq 0$ והפונקציה $F_2(x)=-\frac{x^2}{2}$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=\lvert x\rvert$ בתחום $x<0$.
אם פונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה של פונקציה $f(x)$ בתחום A, אז כל פונקציה מהצורה $F(x)+C$ (C מספר קבוע) גם היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ באותו התחום. אוסף הפונקציות $F(x)+C$ נקרא **אינטגרל לא מסוים** של הפונקציה $f(x)$. המספר C נקרא **קבוע האינטגרציה.** $\int f(x)dx=F(x)+C$. כלומר, אינטגרל לא מסוים הוא אוסף פונקציות השונות זו מזו במספר קבוע.	אוסף הפונקציות  הוא אינטגרל לא מסוים של הפונקציה: 	הפונקציה $F(x)=x^2$ היא פונקציה קדומה של פונקציה $f(x)=2x$ כי $(x^2)'=2x$ כל אחת מהפונקציות $F_1(x)=x^2+2$, $F_2(x)=x^2-5$, $F_3(x)=x^2-0.44$ וכן הלאה גם הן פונקציות קדומות של הפונקציה $f(x)=2x$. אינטגרל לא מסוים של הפונקציה $2x$: $\int 2xdx=x^2+C$
אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $[a, b]$ אז ההפרש $F(b)-F(a)$ נקרא **אינטגרל מסוים של הפונקציה f(x) בתחום [a, b].** המספרים a ו- b נקראים **גבולות האינטגרציה.** a הוא **הגבול התחתון** ו-b הוא **הגבול העליון.** $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=$ $=F(b)-F(a)$	**<u>הערה:</u>** אינטגרל מסוים הוא מספר (ולא פונקציה). המספר הזה לא תלוי בבחירת הפונקציה הקדומה מבין הפונקציות השייכות לאוסף הפונקציות $F(x)+C$.	חשבו $\int_{-1}^{2} 2xdx$. **פתרון.** אחת מהפונקציות הקדומות של הפונקציה $2x$ היא הפונקציה x^2 (ר' סעיף הקודם). ולכן: $\int_{-1}^{2} 2xdx=[x^2]_{-1}^{2}=2^2-(-1)^2=3$ כלומר, האינטגרל המסוים של הפונקציה $2x$ בתחום $[-1, 2]$ הוא 3.

אינטגרלים לא אמיתיים הם אינטגרלים קשורים לאינסוף. כלומר: אם אחד מגבולות האינטגרציה או שניהם הוא ∞, -∞ או תחום האינטגרציה כולל נקודה שבה הפונקציה לא מוגדרת ושואפת ל-∞ או -∞. במקרים כאלה יש לעבור לגבול המתאים:. $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx$ כאשר $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	 	1. חשבו $\int_1^{\infty}(\frac{2}{x^3})dx$. **פתרון**. פונקציה הקדומה של הפונקציה $-\frac{1}{x^2}$ היא פונקציה $\frac{2}{x^3}$. $\int_1^{\infty}\frac{2}{x^3}dx = [-\frac{1}{x^2}]_1^{\infty} =$ $= \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x^2}) - (-1) = 0 + 1 = 1$ 2. חשבו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ **פתרון.** פונקציה הקדומה של הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ היא פונקציה $F(x) = 2\sqrt{x}$. הנקודה x=0 לא שייך לתחום ההגדרה של הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ לכן יש צורך לעבור לגבול: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$ $= \lim_{t\to 0^+}[2\sqrt{x}]_t^1 = 2 - \lim_{t\to 0^+}(2\sqrt{t}) =$ $= 2 - 0 = 2$

טבלת אינטגרלים מיידיים (הטבלה התקבלה על סמך טבלת הנגזרות).

פונקציה f(x)	a פונקציה קבועה	x^n $n\neq -1$	$\frac{1}{x}$	sin x	cos x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
פונקציה קדומה F(x)	ax	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	ln |x|	-cos x	sin x	tan x	-cot x	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

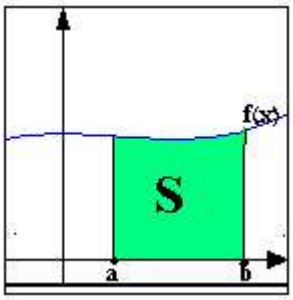
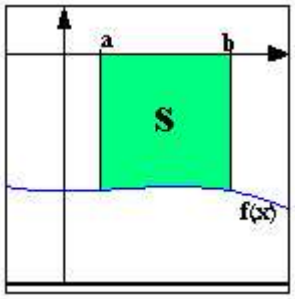
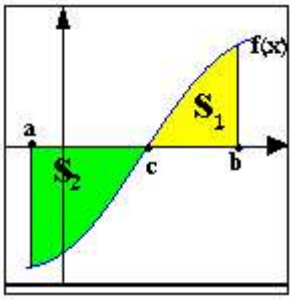
<u>הערה</u> בטבלה נתונה רק אחת מהפונקציות הקדומות. על ידי הוספת מספר קבוע (+C) נקבל כל פונקציה קדומה אחרת.

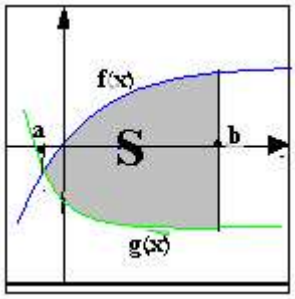
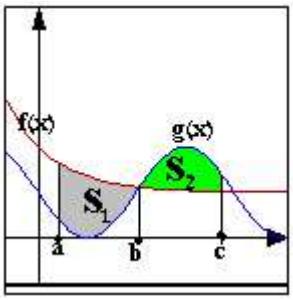
כללי אינטגרציה

צורה מילולית	צורה סימבולית	דוגמאות
אינטגרל של סכום (הפרש) של שתי פונקציות שווה לסכום (הפרש) של שני האינטגרלים המתאימים	$\int(f(x)\pm g(x)dx) =$ $= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int(\sin x + x^2)dx = \int \sin x dx +$ $+ \int x^2 dx = -\cos x + \frac{x^3}{3} + C$

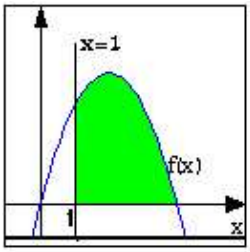
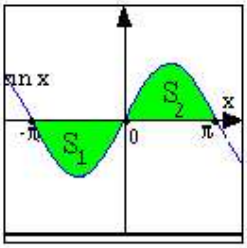
אינטגרל של מכפלת פונקציה בגורם קבוע שווה למכפלת האינטגרל של הפונקציה באותו הגורם. (גורם קבוע אפשר להוציא מחוץ לאינטגרל)	$\int (af(x))dx = a\int f(x)dx$	1. $\int 3x^4dx = 3\int x^4dx = 3\cdot\frac{x^5}{5}+C =$ $=\frac{3}{5}x^5+C$ 2. $\int (2x-3x^3)dx = 2\int xdx - 3\int x^3dx =$ $=2\cdot\frac{x^2}{2}-3\cdot\frac{x^4}{4}+C = x^2-\frac{3}{4}x^4+C$
אינטגרל של פונקציה מפונקציה קווית שווה למכפלה של אינטגרל של הפונקציה המתווכת במספר ההפוך לשיפוע של הפונקציה הקווית.	$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(z)dz$ כשה $z = kx+b$	$\int (2x-5)^4dx = \frac{1}{2}\int z^4dz =$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5}+C = \frac{1}{10}(2x-5)^5+C$

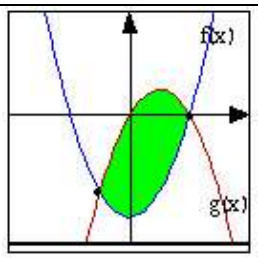
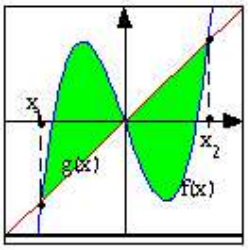
חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים

צורה מילולית	צורה סימבולית	צורה גרפית
השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה f(x) (מלמעלה), הישרים x=a, x=b וציר ה-X (מלמטה) שווה לאינטגרל המסוים של הפונקציה f(x) בתחום [a, b] (a<b).	$S = \int_a^b f(x)dx$	
השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה f(x) (מלמטה), הישרים x=a, x=b וציר ה-X (מלמעלה) שווה לנגדי של האינטגרל המסוים של הפונקציה f(x) בתחום [a, b] (a<b). אולי לכתוב שהוא שווה האינטגרל המסוים.	$S = -\int_a^b f(x)dx$	
במקרה שחלק מהגרף של הפונקציה f(x) בתחום האינטגרציה נמצא מעל לציר ה-X וחלק אחר של הגרף נמצא מתחת לציר ה-X, אפשר לחשב כל אחד מהחלקים של השטח בנפרד ואחר כך לחבר אותם.	$S = S_1 + S_2 =$ $= \int_c^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx$	

השטח בין גרפים של שתי פונקציות בתחום שאחד מהגרפים נימצא מעל הגרף האחר, שווה לאינטגרל מסוים של ההפרש של שתי הפונקציות.	$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$	
אם שני הגרפים נחתכים בתחום האינטגרציה, אפשר להרכיב את השטח ממספר חלקים.	$S=S_1+S_2=$ $=\int_a^b (f(x)-g(x))dx+$ $+\int_b^c (g(x)-f(x))dx$	

דוגמאות

משימה	גרף	פתרון
1. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)=4x-x^2$, ציר ה-X והישר $x=1$.		לפי הסרטוט, הגבול התחתון של האינטגרציה הוא 1 והגבול העליון הוא נקודת אפס של הפונקציה f(x) : $4x-x^2=0$, $x_1=0$, $x_2=4$ ולכן $x_2=4$ הוא הגבול העליון. עכשיו אפשר לחשב את השטח : $S=\int_1^4 (4x-x^2)dx=[2x^2-\frac{x^3}{3}]_1^4=$ $=(2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3})-(2\cdot 1^2-\frac{1^3}{3})=9$
2. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$ וציר ה-X בתחום $[-\pi, \pi]$.		חלק אחד מהגרף נמצא מעל ציר ה-X וחלק האחר תחת הציר. לכן השטח שווה לסכום של שני השטחים : $S=S_1+S_2=-\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx+\int_0^{\pi}\sin x\,dx=$ $=-[-\cos x]_{-\pi}^{0}+[-\cos x]_0^{\pi}=$ $=(\cos 0-\cos(-\pi))+$ $+(-\cos\pi-(-\cos 0))=$ $=(1-(-1))+(1-(-1))=4$

3. חשבו את השטח בין שתי הפרבולות: $f(x)=x^2-4$ ו- $g(x)=2x-x^2$		נחשב קודם את גבולות האינטגרציה שהן נקודות החיתוך של שני הגרפים: $x^2-4=2x-x^2$ $x_1=-1$, $x_2=2$. מכיוון שבתחום האינטגרציה גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $f(x)$ אז: $S=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))dx=$ $=\int_{-1}^{2}(2x-x^2-(x^2-4))dx=$ $=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx=$ $=[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x]_{-1}^{2}=$ $=(-\frac{2\cdot 2^3}{3}+2^2+4\cdot 2)-$ $-(-\frac{2\cdot(-1)^3}{3}+(-1)^2+4\cdot(-1))=9$
4. חשבו שטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3-6x$ ו- $g(x)=3x$.		לשני הגרפים יש שלוש נקודות חיתוך: $x=0$ ועוד שתי נקודות x_1 ו- x_2 $x_2=2$, $x_1=-2$, $x^3-6x=3x$ בתחום $[-2, 0]$ גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $g(x)$ ובתחום $[0, 2]$ – להפך ולכן: $S=S_1+S_2=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+$ $+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx=\int_{-2}^{0}(x^3-9x)dx+$ $+\int_{0}^{2}(9x-x^3)dx=[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}]_{-2}^{0}+$ $+[\frac{9x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]_{0}^{2}=14+14=28$

Instagram
אוריאל מתמטיקה
URIEL MATEMATIKA